EC239 - MATEMÁTICA

Prof. Gustavo Ramos Sampaio
Monitores:
Magnon
Lucas

Lista de Exercícios 2

Entregar no dia da prova

1. Considere a expanção de Taylor para a função $y = f(x)$ em torno do ponto $x = 0$ e julgue as afirmativas:

(0,4) a) Se $f(x) = sen(x)$, então a série de Taylor só tem termos de grau ímpar.

(0,4) b) Se $f(x)$ é um polinômio de grau n, então a expanção de Taylor de f em torno de 0 é o próprio polinômio.

(0,4) c) Seja k uma constante positiva. Se $f(x) = e^{kx}$ e os coeficientes dos termos de 2^a e 3^a ordem são iguais, então $k = 3$.

(0,4) d) Para toda constante k, o termo independente da expanção de Taylor de $f(x) = cos(kx)$ em torno de 0 é k.

(0,4) e) Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, para $-1 < x < 1$, então $P(x) = 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{4.3}{2!}x^2 + \frac{4.3.2}{3!}x^3 + \frac{4.3.2.1}{4!}x^4$ é o polinômio de Taylor de grau 4 da função f.

2. Se nos é dada uma função receita média (RM_e) na forma seguinte:

$$RM_e = 15 - Q \tag{1}$$

A função receita total pode ser obtida multiplicando-se a função receita média por Q

$$R = RM_e \cdot Q = (15 - Q)Q = 15Q - Q^2 \tag{2}$$

a) Obtenha a receita marginal (RM_g), ou seja, a taxa de variação instantânea da receita total em relação a Q.

b) Qual a quantidade ótima a ser produzida? Ou seja, a quantidade em que a receita total é maximizada?

3. Para cada uma das equações, encontre dy/dx por derivação implícita.

$$x^2 - 5xy + 3y^2 = 7$$

$$xe^{(x^2+y^2)} = 5$$

$$\frac{(2x + 3y)}{(x^2 + y^2)} = 9$$

$$x^3 + y^3 = 8$$

4. Suponha que uma empresa possua a seguinte curva de custo total:

$$C(Q) = Q^3 - 12Q^2 + 60Q \tag{3}$$

A função custo médio (CM_e) é dada pelo queciente da função custo total pela quantidade total produzida. Assim:

$$CM_e = \frac{C(Q)}{Q} = Q^2 - 12Q + 60 \tag{4}$$

a) Obtenha a curva de custo marginal (CM_g) da empresa.

b) Esboce os gráficos das curvas de custo médio e custo marginal.

c) Intuitivamente, qual a quantidade ótima que esta empresa deveria produzir?

5. Dada a seguinte função:

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2) \tag{5}$$

O seu gráfico toma a seguinte forma:

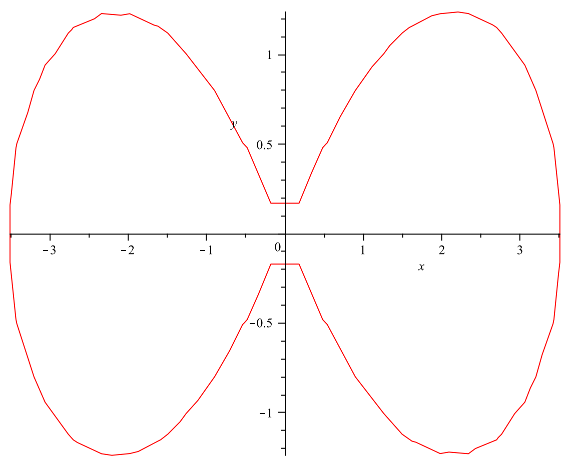

Figure 1: Gráfico da Função

Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto $(3, 1)$.

6. Se $f(x) = 2 \cdot cos(x) + sen^2(x)$. Seu gráfico é dado da seguinte forma:

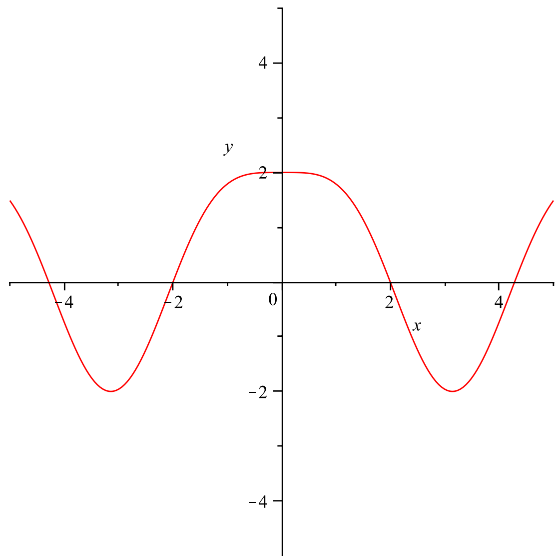

Figure 2: Gráfico da Função

a) Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

b) Para ver se suas respostas para a parte a) são razoáveis compare os gráficos de f, f' e f''.

7. O custo, em reais, da produção de x unidades de um certo utensílio é:

$$C(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3 \tag{6}$$

a) Encontre a função custo marginal.

b) Encontre $C'(100)$ e explique o seu significado.

c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101^o item.

8. A figura mostra o gráfico de uma população de abelhas criadas em um apiário (x- Tempo (em semanas), y-Número de abelhas (em milhares)).

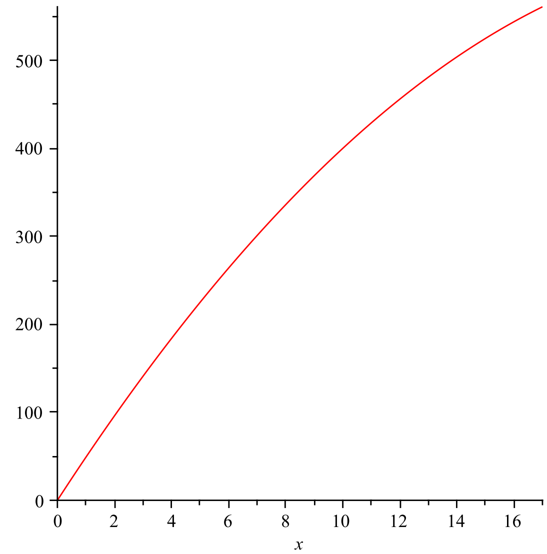

Figure 3: Gráfico da Função

a) Use uma aproximação linear para predizer a população de abelhas após 18 semanas e após 20 semanas.

b) Suas predições estão sub ou superestimadas? Por quê?

c) Qual de suas predições você acha mais precisa? Por quê?

9. O gráfico da derivada segunda f'' de uma função f está mostrado. Estabeleça uma aproximação das coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.

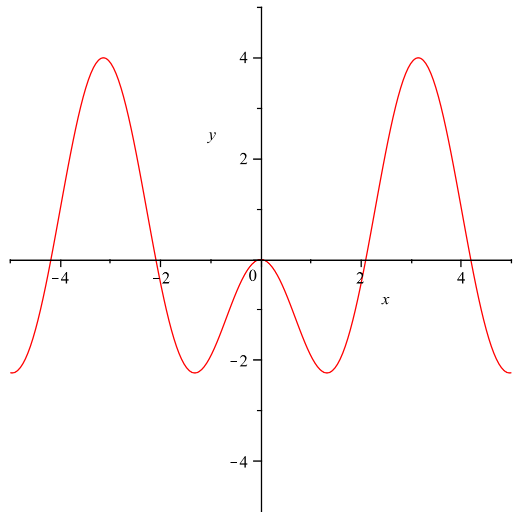

Figure 4: Gráfico da Função

10. O gráfico da derivada primeira f' de uma função f está mostrado

a) Em que intervalos está f crescendo? Explique.

b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.

c) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?

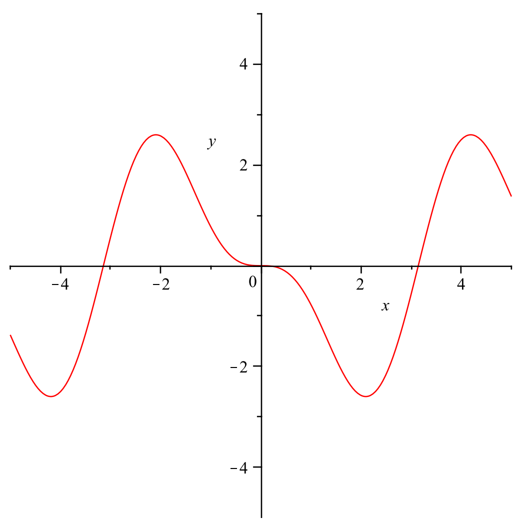

Figure 5: Gráfico da Função

11. Suponha que você more um uma cidade que está localizada a 1000 metros de altura e que você irá sair de casa (de carro) para cruzar uma cadeia de montanhas cujo formato é dado pela seguinte equação:

$$y = 1000 - 0,01x^2 + 20x$$

a) Em um certo momento da viagem você se encontra em um ponto onde você já percorreu 350 km. Quantos quilômetros a mais você deve percorrer até chegar ao topo da montanha?

b) Qual a altura máxima da montanha em relação ao nível do mar?

12. O custo, em reais, da produção de x unidades de um certo utensílio é:

$$C(x) = 920 + 2x - 0,02x^2 + 0,00007x^3 \tag{7}$$

a) Encontre a função custo marginal.

b) Encontre $C'(100)$ e explique o seu significado.

c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101^o item.

13. Considere as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 1 \\ x^3 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade, julgue os itens abaixo e explique sua resposta:

a) A função $f(x)$ é contínua em $x = 0$

b) A derivada de f não é contínua em $x = 0$

c) A função g é diferenciável em $x = 1$

d) A segunda derivada de f é diferenciável em $x = 0$

e) A função h, definida por $h(x) = |f(x)|$ não é diferenciável em $x = 0$

14. Seja $f : R \to R$ uma função tal que $f(0) = 2$ e $f'(x) = x^2 f(x) - 3x^2$, para todo x em R. Calcule $\alpha = 5 - f'''(0)$.

15. Classifique como verdadeiro ou falso as alternativas abaixo e justifique a sua resposta.

a) Para que uma função seja dita contínua, é necessário, apenas, que os limites laterais sejam iguais em todos os pontos do seu domínio.

b) Um ponto crítico vai existir quando a primeira derivada da função for zero no ponto dado ou que a derivada não exista.

c) Dada a função $f(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + 15$, o ponto $(3, \frac{27}{2})$ é um ponto de máximo.

d) Toda função contínua é diferenciável em qualquer ponto do seu domínio.

e) Toda função diferenciável é uma função contínua.